Vzorce a recepty nebeské mechaniky

Verze 3.0

Petr Scheirich, 2004
http://nebmech.astronomy.cz

Obsah

1 Úvod

Tato brožurka nemá být učebnicí nebeské mechaniky. Její první verze vznikla v roce 2001 z autorovy potřeby vytvořit kompaktní seznam vzorců používaných (nebo použitelných) při výpočtech pohybů a poloh vesmírných těles, aby je nebylo nutné neustále hledat v nejrůznější literatuře, či dokonce znovu odvozovat.
Od čtenáře se předpokládá, že význam pojmů, které se v ní vyskytují, alespoň zhruba zná. Všem začátečníkům před jejím používáním doporučuji si nastudovat stránky http://nebmech.astronomy.cz, kde je vše srozumitelně vysvětleno.

2 Souřadnice na obloze

Označení veličin:

α – rektascenze (v tomto odstavci vždy v hodinách),
t – hodinový úhel (v hodinách),
δ – deklinace,
h – výška nad obzor,
A – výška nad obzorem,
ϕ – zeměpisná šířka,
λ – zeměpisná délka,
S_m – místní hvězdný čas,
S_g – Greenwichský hvězdný čas,
S_0 – Greenwichský hvězdný čas v 0 h UT,
JD – Juliánské datum v 0 h UT,
T_u – čas uplynulý od standardní epochy J2000,0 (JD 2451545,0) vyjádřený v juliánských stoletích,
k – poměr středního slunečního dne a středního hvězdného dne,
$x_A,\ y_A,\ z_A$ – pravoúhlé azimutální souřadnice (osa x míří k jihu, osa z k zenitu),
$x_R,\ y_R,\ z_R$ – pravoúhlé rovníkové souřadnice (osa x míří k jarnímu bodu, osa z k sev. neb. pólu),
$l,\ b$ – ekliptikální souřadnice (délka a šířka),
$x_E,\ y_E,\ z_E$ – pravoúhlé ekliptikální souřadnice (osa x míří k jarnímu bodu, osa z k sev. pólu ekliptiky),
o – sklon ekliptiky k rovníku.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$T_u = (JD - 2451545,0)/36525,$$
$$k = 1,002737909350795 + 5,9006 \cdot 10^{-11} T_u - 5,9 \cdot 10^{-15} T_u^2, [6]$$
$$S_0 = 24110,54841 + 8640184,812866 T_u + 0,093104 T_u^2 - 6,2 \cdot 10^{-6} T_u^3, [6]$$
$$S_g = S_0 + k\mathrm{UT},$$
$$S_m = S_0 + k\mathrm{UT} + \lambda/15.$$

$$S_m = \alpha + t.$$

Obzorníkové souřadnice

$$x_A = \cos h \cos A,$$
$$y_A = \cos h \sin A,$$
$$z_A = \sin h.$$

$$h = \arctan\left(\frac{z_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}\right),$$
$$x_A > 0 : A = \arctan(y_A/x_A)$$
$$x_A < 0 : A = \arctan(y_A/x_A) + 180°,$$
$$x_A = 0 \text{ a } y_A > 0 : A = 90°,$$
$$x_A = 0 \text{ a } y_A < 0 : A = 270°.$$

Rovníkové souřadnice

$$x_R = \cos\delta \cos(15\alpha),$$
$$y_R = \cos\delta \sin(15\alpha),$$
$$z_R = \sin\delta.$$

α, δ vypočteme z x_R, y_R a z_R obdobně jako A, h z x_A, y_A, z_A.

Obzorníkové $\leftrightarrow$ rovníkové souřadnice

$$x_A = x_R \cos H \sin\phi + y_R \sin H \sin\phi - z_R \cos\phi,$$
$$y_A = x_R \sin H - y_R \cos H,$$

$$z_A = x_R \cos H \cos \phi + y_R \sin H \cos \phi + z_R \sin \phi,$$

$$x_R = x_A \cos H \sin \phi + y_A \sin H + z_A \cos H \cos \phi,$$
$$y_R = x_A \sin H \sin \phi - y_A \cos H + z_A \sin H \cos \phi,$$
$$z_R = -x_A \cos \phi + z_A \sin \phi,$$

kde $H = 15 S_m$.

<u>Ekliptikální souřadnice</u>

$$x_E = \cos b \cos l,$$
$$y_E = \cos b \sin l,$$
$$z_E = \sin b.$$

l, b vypočteme z x_E, y_E a z_E obdobně jako A, h z x_A, y_A, z_A.

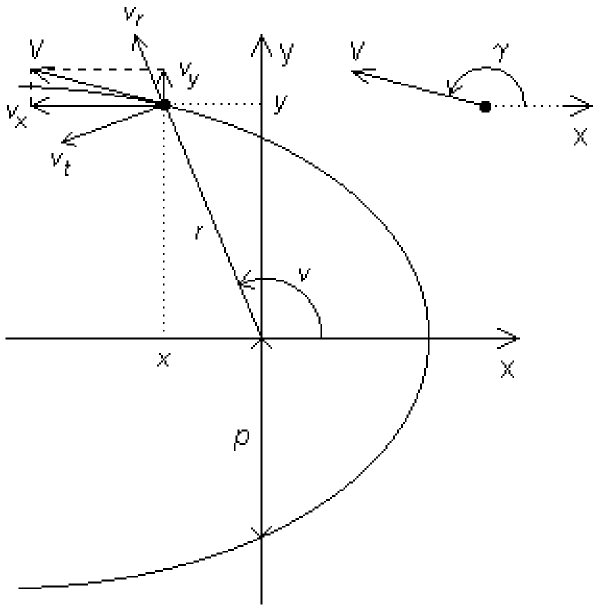
<u>Ekliptikální ↔ rovníkové souřadnice</u>

$$x_R = x_E,$$
$$y_R = y_E \cos o - z_E \sin o,$$
$$z_R = y_E \sin o + z_E \cos o,$$

$$x_E = x_R,$$
$$y_E = y_R \cos o + z_R \sin o,$$
$$z_E = z_R \cos o - y_R \sin o,$$

kde $o = 23°26'21,448'' - 46,8150'' T_u - 0,00059'' T_u^2 + 0,001813'' T_u^3$
$= 23,43929111° - 0,013004166° T_u - 0,1638° \cdot 10^{-6} T_u^2 + 0,5036° \cdot 10^{-6} T_u^3$[6]

3 Pohyb po kuželosečce



Označení veličin:

v – pravá anomálie (úhel mezi směrem k pericentru a směrem k danému bodu),
u – úhlová rychlost ($= dv/dt$),
e – numerická výstřednost dráhy (excentricita),
p – parametr dráhy,
G – univerzální gravitační konstanta,
M_S – hmotnost soustavy,
$M_\odot$ – hmotnost Slunce,
r – vzdálenost od centra (ohniska),
V – rychlost na dráze,
γ – úhel směru rychlosti V (měřený ve stejném smyslu jako pravá anomálie v).
$x,\ y$ – souřadnice v rovině dráhy s počátkem v ohnisku a osou x mířící k pericentru,
$V_x,\ V_y$ – složky rychlosti na dráze v souřadnicích x, y,
V_r – radiální složka rychlosti na dráze (ve směru průvodiče),
V_t – kolmá složka rychlosti na dráze (kolmá k radiální),
E – celková energie soustavy,

M – celkový moment hybnosti soustavy.

Velikosti a jednotky konstant:

$G = 6,672 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\ [kg^{-1}m^3s^{-2}]$ [1]
Sluneční soustava:

$$\begin{aligned} M_S &= 1,9891 \cdot 10^{30}\ kg, \\ GM_S &= 1,3271244 \cdot 10^{20}\ m^3s^{-2}, \\ &= 2,959122083 \cdot 10^{-4}\ AU^3d^{-2}, \\ G &= 2,959122083 \cdot 10^{-4}\ M_{\odot}^{-1}AU^3d^{-2}, \end{aligned}$$

$GM_Z = 398600,44 \cdot 10^9\ m^3s^{-2}$,
$GM_M = 4902,8 \cdot 10^9\ m^3s^{-2}$,
kde M_Z je hmotnost Země a M_M je hmotnost Měsíce.

Převodní vztahy mezi veličinami:

Veškeré vzorce v této a následujících kapitolách věnovaných pohybu v poli centrální síly platí pro souřadný systém s počátkem v jednom z těles. Chceme-li spočítané veličiny (s centrem v tělesu A) převést do těžišťového systému, transformujeme je podle vzorců:
Pro délkové veličiny a rychlosti: $a' = a \cdot m_A/(m_A + m_B)$;
pro úhly: $v' = v$.
(Čárkované veličiny jsou v těžišťovém systému)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad \text{(polární rovnice kuželosečky).}$$

$$\begin{aligned} x = r\cos v \quad &= \frac{p-r}{e}, \\ y = r\sin v \quad &= \frac{\sqrt{r^2e^2 - (p-r)^2}}{e}. \end{aligned}$$

$$r^2u = \sqrt{GM_Sp} \quad \text{(Keplerův zákon ploch),}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{p}(1 + 2e\cos v + e^2)} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{p}(2p/r - 1 + e^2)},$$

$$\gamma = \arctan\left(-\frac{e + \cos v}{\sin v}\right) + 180^\circ \text{ pro } v \in (0^\circ, 180^\circ),$$

$$\gamma = \arctan\left(-\frac{e+\cos v}{\sin v}\right) \text{ pro } v \in (180°, 360°),$$

$$V_r = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\, e\sin v \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2pr - p^2}{r^2}} \quad = -eV_x,$$

$$V_t = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\,(1 + e\cos v) \quad = \frac{\sqrt{GM_S p}}{r} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\,(1 - e^2) + eV_y,$$

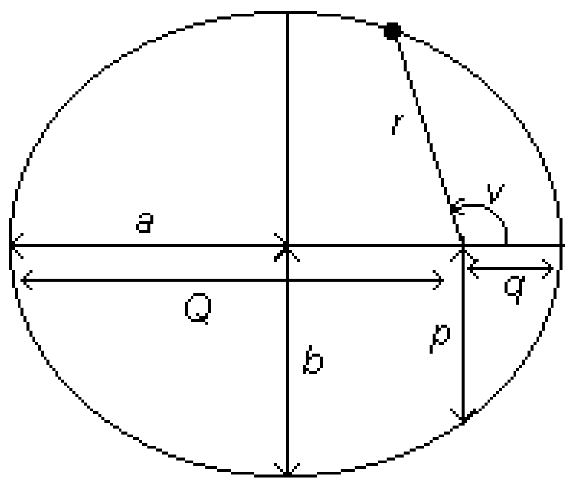
$$V_x = -\sqrt{\frac{GM_S}{p}}\,\sin v \quad = -\sqrt{\frac{GM_S}{p}}\sqrt{1 - \left(\frac{p-r}{re}\right)^2} \quad = -\frac{1}{e}V_r,$$

$$V_y = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\,(e + \cos v) \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\,\frac{re^2 + p - r}{re} \quad = \frac{1}{e}V_t - \sqrt{\frac{GM_S}{p}}\frac{1-e^2}{e}.$$

$$E = Gm_A m_B \frac{e^2 - 1}{2p},$$

$$M^2 = \frac{m_A^2 m_B^2}{M_S} Gp.$$

4 Elipsa



Označení veličin:

a – velká (hlavní) poloosa,
e – numerická výstřednost (excentricita),
b – malá (vedlejší) poloosa,

p – parametr,
q – vzdálenost v pericentru,
Q – vzdálenost v apocentru,
r – vzdálenost od ohniska,
v – pravá anomálie (úhel mezi směrem k pericentru a směrem k danému bodu).

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad \text{(polární rovnice elipsy).}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \frac{p - r}{r\cos v} = 1 - \frac{q}{a} = \frac{p}{q} - 1 = \frac{Q}{a} - 1,$$

$$a = \frac{b^2}{p} = \frac{q}{1 - e} = \frac{q + Q}{2} = \frac{Q}{1 + e} = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{q^2}{2q - p},$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = q(1 + e) = Q(1 - e) = 2q - \frac{q^2}{a} = r(1 + e\cos v),$$

$$q = a(1 - e) = \frac{p}{1 + e},$$

$$Q = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e}.$$

5 Pohyb po elipse

(Viz obr. v sekci 3)

Označení veličin:

M – střední anomálie,
E – excentrická anomálie,
v – pravá anomálie,
a – velká poloosa dráhy,
e – numerická výstřednost (excentricita) dráhy,
n – střední denní pohyb,
G – univerzální gravitační konstanta,
k – Gaussova gravitační konstanta (pro úhly vyjádřené v radiánech),
k_S – Gaussova gravitační konstanta pro úhly vyjádřené ve stupních,
M_S – hmotnost soustavy,
r – vzdálenost od centra (ohniska),

V – rychlost na dráze,

x, y – souřadnice v rovině dráhy s počátkem v ohnisku a osou x mířící k pericentru,

V_x, V_y – složky rychlosti na dráze v souřadnicích x, y,

V_r – radiální složka rychlosti na dráze (ve směru průvodiče),

V_t – kolmá složka rychlosti na dráze (kolmá k radiální).

V_p – rychlost v pericentru,

V_a – rychlost v apocentru,

T – oběžná doba,

t – čas,

T_0 – okamžik průchodu pericentrem.

Velikosti a jednotky konstant:

Sluneční soustava:

k=0,01720209895

$GM_S = k^2\ AU^3 d^{-2}$,

$k_S = k180/\pi = 0.985607614$.

Ostatní viz kapitola Pohyb po kuželosečce.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}},$$
$$k = \sqrt{GM_S},$$
$$n = ka^{-3/2}\ [\text{rad}] \quad = k_S a^{-3/2}\ [^\circ],$$
$$M = n(t - T_0),$$
$$M_0 = n(t_0 - T_0),$$
$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$$E - e\sin E = M \quad \text{(Keplerova rovnice, pro M, E v rad.)},$$
$$E - (180/\pi)e\sin E = M \quad \text{(pro M, E ve stupních)},$$

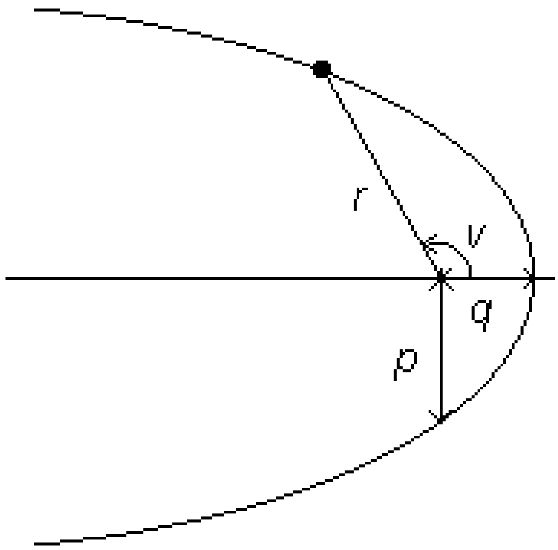
$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \qquad \sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E},$$
$$\cos E = \frac{e + \cos v}{e\cos v + 1}, \qquad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{e\cos v + 1},$$

$$\tan\tfrac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\tan\tfrac{E}{2}.$$

$$\begin{aligned}
r &= a(1-e\cos E),\\
x &= r\cos v \quad = a(\cos E - e),\\
y &= r\sin v \quad = a\sqrt{1-e^2}\sin E.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)},\\
a &= \frac{rGM_S}{2GM_S - V^2 r},\\
V_p &= \sqrt{\frac{GM_S}{a}\frac{1+e}{1-e}},\\
V_a &= \sqrt{\frac{GM_S}{a}\frac{1-e}{1+e}},\\
V_x &= -\sqrt{\frac{GM_S}{a}}\frac{\sin E}{1-e\cos E} \quad = -\sqrt{\frac{GM_S}{a(1-e^2)}}\;\sin v,\\
V_y &= \sqrt{\frac{GM_S(1-e^2)}{a}}\frac{\cos E}{1-e\cos E} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{a(1-e^2)}}\;(e+\cos v),\\
V_r &= \sqrt{\frac{GM_S}{a(1-e^2)}}\;e\sin v \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{a}\left(\frac{2ar-a^2(1-e^2)}{r^2}-1\right)} \quad = -eV_x,\\
V_t &= \sqrt{\frac{GM_S}{a(1-e^2)}}\;(1+e\cos v) \quad = \frac{\sqrt{GM_S a(1-e^2)}}{r} \quad = \sqrt{\frac{GM_S(1-e^2)}{a}} + eV_y.
\end{aligned}$$

6 Parabola



Označení veličin:

p – parametr,
q – vzdálenost v pericentru,
$e = 1$ – numerická výstřednost (excentricita),
r – vzdálenost od ohniska,
v – pravá anomálie (úhel mezi směrem k pericentru a směrem k danému bodu).

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad = \frac{p}{1 + \cos v} \quad = \frac{2q}{1 + \cos v} \quad = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}v},$$

$$q = \frac{p}{2},$$

$$\cos v = \frac{2q}{r} - 1.$$

7 Pohyb po parabole

(Viz obr. v sekci 3)

Označení veličin:

B, W – analogie střední anomálie,
v – pravá anomálie,
G – univerzální gravitační konstanta,
k – Gaussova gravitační konstanta (pro úhly vyjádřené v radiánech),
k_S – Gaussova gravitační konstanta pro úhly vyjádřené ve stupních,
M_S – hmotnost soustavy,
r – vzdálenost od centra (ohniska),
V – rychlost na dráze,
$x,\ y$ – souřadnice v rovině dráhy s počátkem v ohnisku a osou x mířící k pericentru,
$V_x,\ V_y$ – složky rychlosti na dráze v souřadnicích x, y,
V_r – radiální složka rychlosti na dráze (ve směru průvodiče),
V_t – kolmá složka rychlosti na dráze (kolmá k radiální).
V_p – rychlost v pericentru,
T – oběžná doba,
t – čas,
T_0 – okamžik průchodu pericentrem.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$B = q^{-3/2}(t - T_0),$$
$$\tan\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{GM_S}{2}}\,B \qquad \text{(Barkerova rovnice).}$$

Řešení Barkerovy rovnice:

$$\tan\tfrac{v}{2} = 2\cot\gamma \quad = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}} - \tan\tfrac{\gamma}{2},$$

kde

$$\tan\tfrac{\gamma}{2} = \sqrt[3]{\tan\tfrac{\beta}{2}},$$
$$\tan\beta = \frac{2}{3B}\sqrt{\frac{2}{GM_S}}.$$

Některá literatura (např. [?]) definuje analogii střední anomálie (i Barkerovu rovnici) mírně odlišně, vše se ale liší pouze o konstanty:

$$W = \frac{3 \cdot \sqrt{GM_S/2}}{q^{3/2}}(t - T_0),$$
$$3 \tan \frac{v}{2} + \tan^3\left(\frac{v}{2}\right) = W.$$

Řešení Barkerovy rovnice:

$$\tan \tfrac{v}{2} = \frac{2}{\tan 2\gamma},$$
kde
$$\tan \gamma = \sqrt[3]{\tan \tfrac{\beta}{2}},$$
$$\tan \beta = \frac{2}{W}.$$

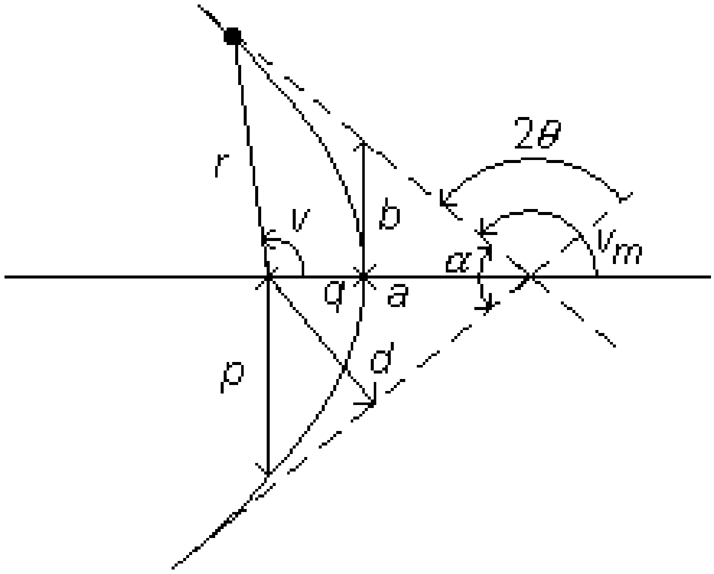
Další možností řešení (viz. [9]) je toto:

$$\tan \tfrac{v}{2} = Y - 1/Y,$$
kde
$$Y = \sqrt[3]{G + \sqrt{G^2 + 1}},$$
$$G = W/2.$$

$$x = r\cos v \quad = q(1 - \tan^2 \tfrac{v}{2}) \quad = 2q - r,$$
$$y = r \sin v \quad = 2q \tan \tfrac{v}{2} \quad = 2\sqrt{q(r - q)}.$$

$$V = \sqrt{\frac{2GM_S}{r}} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{q}(1 + \cos v)},$$
$$V_x = -V_r \quad = -\frac{\sqrt{2GM_S(r - q)}}{r} \quad = -\sqrt{\frac{GM_S}{2q}} \sin v,$$
$$V_y = V_t \quad = \frac{\sqrt{2GM_S q}}{r} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{2q}}\,(1 + \cos v),$$
$$V_p = \sqrt{\frac{2GM_S}{q}}.$$

8 Hyperbola



Označení veličin:

a – hlavní poloosa,
e – numerická výstřednost (excentricita),
b – vedlejší poloosa,
p – parametr,
q – vzdálenost v pericentru,
r – vzdálenost od ohniska,
v – pravá anomálie (úhel mezi směrem k pericentru a směrem k danému bodu),
v_m – maximální/minimální hodnota pravé anomálie,
α – odchylka asymptot.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v} \quad \text{(polární rovnice hyperboly).}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} \quad = \frac{p - r}{r\cos v} \quad = \frac{q}{a} + 1 \quad = \frac{p}{q} - 1 \quad = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad = \frac{-1}{\cos v_m}$$

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{b^2}{p} \quad = \frac{q}{e-1} \quad = \frac{p}{e^2-1} \quad = \frac{q^2}{p-2q} \\
p &= \frac{b^2}{a} \quad = a(e^2-1) \quad = q(e+1) \quad = \frac{q^2}{a} + 2q \quad = r(1 + e\cos v) \\
q &= a(e-1) \quad = \frac{p}{e+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha + |2v_m| = 360^\circ \\
&e \cos \tfrac{\alpha}{2} = 1 \\
&\cos\alpha = \frac{2}{e^2} - 1 \\
&e \cos v_m = -1 \\
&\cos v_m = -\cos \tfrac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

9 Pohyb po hyperbole

(Viz obr. v sekcích 3 a 8)

Označení veličin:

M – analogie střední anomálie,
H – analogie excentrické anomálie,
v – pravá anomálie (úhel mezi směrem k pericentru a směrem k danému bodu),
a – velká poloosa dráhy,
e – numerická výstřednost (excentricita),
n – analogie středního denního pohybu,
G – univerzální gravitační konstanta,
k – Gaussova gravitační konstanta,
M_S - hmotnost soustavy,
r – vzdálenost od centra (ohniska),
V – rychlost na dráze,
$x,\ y$ – souřadnice v rovině dráhy s počátkem v ohnisku a osou x mířící k pericentru,
$V_x,\ V_y$ – složky rychlosti na dráze v souřadnicích x, y,
V_r – radiální složka rychlosti na dráze (ve směru průvodiče),
V_t – kolmá složka rychlosti na dráze (kolmá k radiální).
V_p – rychlost v pericentru,

V_∞ – rychlost v nekonečnu (příletová nebo odletová),
t – čas,
T_0 – okamžik průchodu pericentrem,
2θ – úhel odchýlení dráhy (odchylka vektorů příletové a odletové rychlosti),
v_m – maximální/minimální hodnota pravé anomálie,
α – odchylka asymptot,
d – impact parameter – vzdálenost, ve které by těleso prolétlo okolo centra, kdyby se pohybovalo po přímce bez gravitace.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{GM_S},\\
n &= ka^{-3/2}\ \mathrm{rad},\\
M &= n(t-T_0),\\
M_0 &= n(t_0-T_0),\\
M &= n(t-t_0)+M_0,
\end{aligned}
$$

$$e\sinh H - H = M.$$

$$
\cos v = \frac{\cosh H - e}{1-e\cosh H}, \qquad \sin v = \frac{\sqrt{e^2-1}\sinh H}{e\cosh H - 1},
$$

$$
\cosh H = \frac{e+\cos v}{e\cos v + 1}, \qquad \sinh H = \frac{\sin v\sqrt{e^2-1}}{e\cos v+1},
$$

$$
\tan\tfrac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tanh\tfrac{H}{2}.
$$

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{q}{1-e}(1-e\cosh H),\\
x = r\cos v \quad &= \frac{q}{1-e}(e-\cosh H),\\
y = r\sin v \quad &= q\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\sinh H,
\end{aligned}
$$

$$
V = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)} \quad = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r}+\frac{e-1}{q}\right)},
$$

$$
a = \frac{rGM_S}{-2GM_S+V^2r},
$$

$$V_p = \sqrt{GM_S \frac{e+1}{q}},$$

$$V_x = -\sqrt{\frac{GM_S(e-1)}{q}} \frac{\sinh H}{e \cosh H - 1} \quad = -\sqrt{\frac{GM_S}{q(e+1)}} \sin v,$$

$$V_y = \sqrt{\frac{GM_S(1+e)}{q}} (1-e) \frac{\cosh H}{e \cosh H - 1} \quad = \sqrt{\frac{GM_S}{q(e+1)}} (e + \cos v),$$

$$V_r = \sqrt{\frac{GM_S}{q(e+1)}}\, e \sin v \quad = \sqrt{GM_S \left(\frac{e-1}{q} + \frac{2r - q(e+1)}{r^2} \right)} \quad = -eV_x,$$

$$V_t = \sqrt{\frac{GM_S}{q(e+1)}} (1 + e \cos v) \quad = \frac{\sqrt{GM_S q(e+1)}}{r} \quad = \sqrt{\frac{GM_S(1+e)}{q}} (1-e) + eV_y.$$

$$\theta = 90^\circ - \tfrac{\alpha}{2},$$
$$v_m = 90^\circ + \theta.$$

$$e \sin \theta = 1,$$

$$d = \frac{GM_S}{V_\infty^2} \cot \theta \quad = \frac{q}{e-1} \cot \theta \quad = q \sqrt{\frac{e+1}{e-1}},$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{GM_S(e-1)}{q}},$$

$$q = -\frac{GM_S}{V_\infty^2} + GM_S \sqrt{\frac{1}{V_\infty^4} + \left(\frac{d}{GM_S} \right)^2},$$

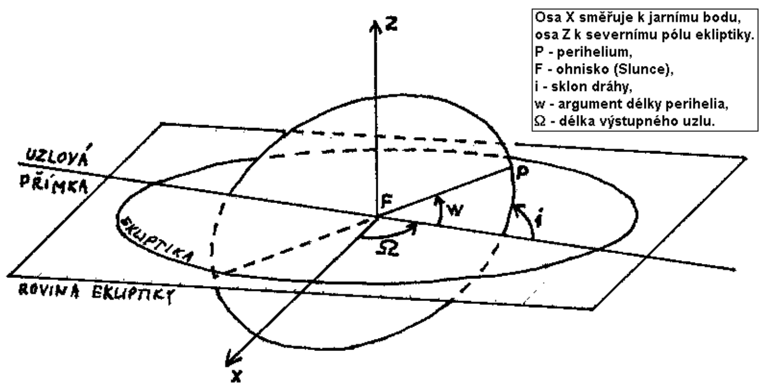
$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{dV_\infty^2}{GM_S} \right)^2}.$$

10 Převod souřadnic na dráze na rovníkové či ekliptikální souřadnice

Označení veličin:

x, y – souřadnice tělesa na dráze vyjadřéné v soustavě s počátkem v centrálním tělese a osou X mířící k pericentru (jejich výpočet viz sekce 5, 7 a 9),

X_r, Y_r, Z_r – souřadnice tělesa v pravoúhlé rovníkové soustavě. Počátek soustavy je v centrálním tělese, osa X míří k jarnímu bodu, rovina XY je rovnoběžná s rovinou zemského rovníku,
X_e, Y_e, Z_e – souřadnice tělesa v pravoúhlé ekliptikální soustavě. Počátek soustavy je v centrálním tělese, osa X míří k jarnímu bodu, rovina XY je rovnoběžná s rovinou ekliptiky,
$P_{r1}, P_{r2}, P_{r3}, Q_{r1}, Q_{r2}, Q_{r3}$ – směrové kosiny dráhy v rovníkové soustavě,
$P_{e1}, P_{e2}, P_{e3}, Q_{e1}, Q_{e2}, Q_{e3}$ – směrové kosiny dráhy v rovníkové soustavě,
i – sklon dráhy k ekliptice,
ω – argument délky perihelia dráhy,
Ω – délka výstupného uzlu dráhy,
o – sklon ekliptiky k rovníku (viz sekce 2).



Význam veličin:

P_i jsou složky jednotkového vektoru $\mathbf{P}$ mířícího od centra do směru pericentra (směr osy x souřadnic na dráze), vyjádřené v ekliptikální nebo rovníkové souřadnicové soustavě.
Q_i jsou složky vektoru kolmého na $\mathbf{P}$ a ležícího na dráze (směr osy y souřadnic na dráze), vyjádřené v ekliptikální nebo rovníkové souřadnicové soustavě.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$P_{r1} = A_1 \cos\omega + A_2 \sin\omega,$$
$$P_{r2} = B_1 \cos\omega + B_2 \sin\omega,$$
$$P_{r3} = C_1 \cos\omega + C_2 \sin\omega,$$
$$Q_{r1} = A_2 \cos\omega - A_1 \sin\omega,$$
$$Q_{r2} = B_2 \cos\omega - B_1 \sin\omega,$$

$Q_{r3} = C_2 \cos\omega - C_1 \sin\omega,$

kde

$$A_1 = \cos\Omega, \qquad A_2 = -\cos i \sin\Omega,$$
$$B_1 = \sin\Omega \cos o, \qquad B_2 = \cos i \cos\Omega \cos o - \sin i \sin o,$$
$$C_1 = \sin\Omega \sin o, \qquad C_2 = \cos i \cos\Omega \sin o + \sin i \cos o.$$

$$P_{e1} = \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega \cos i,$$
$$P_{e2} = \cos\omega \sin\Omega + \sin\omega \cos\Omega \cos i,$$
$$P_{e3} = \sin\omega \sin i,$$
$$Q_{e1} = -\sin\omega \cos\Omega - \cos\omega \sin\Omega \cos i,$$
$$Q_{e2} = -\sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega \cos i,$$
$$Q_{e3} = \cos\omega \sin i.$$

$$X_r = P_{r1}x + Q_{r1}y,$$
$$Y_r = P_{r2}x + Q_{r2}y,$$
$$Z_r = P_{r3}x + Q_{r3}y,$$

$$X_e = P_{e1}x + Q_{e1}y,$$
$$Y_e = P_{e2}x + Q_{e2}y,$$
$$Z_e = P_{e3}x + Q_{e3}y.$$

11 Problém 3 těles

Označení veličin:

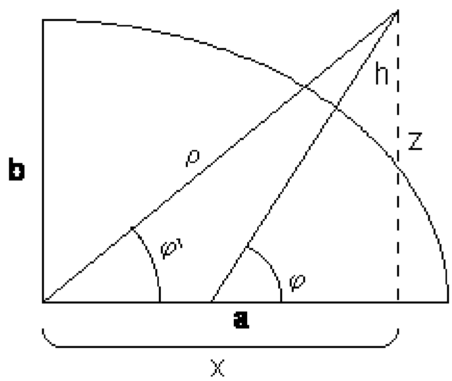
R_p – sféra gravitačního vlivu planety (vůči Slunci),
M_p – hmotnost planety,
D – vzdálenost mezi Sluncem a planetou,
$M_\odot$ – hmotnost Slunce.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$R_p = D \left(\frac{M_p}{M_\odot} \right)^{2/5}.$$

12 Geografické a geocentrické souřadnice

(pro Zemi jako rotační elipsoid) [7], [8]



Označení veličin:

φ – geografická šířka,
h – nadmořská výška,
φ' – geocentrická šířka,
ρ – vzdálenost od středu Země,
a – rovníkový poloměr Země,
b – polární poloměr Země,
x, z – pravoúhlé geocentrické souřadnice,
f – zploštění zemského elipsoidu,
e – excentricita zemského elipsoidu.

Velikosti konstant:

$$a = 6\ 378\ 137 \text{ m (WGS 84)}, [8]$$

$f = 1/298.257\ 223\ 563$ (WGS 84),
$b = 6\ 356752$ m.

Převodní vztahy mezi veličinami:

$$b = a(1-f),$$
$$f = \frac{a-b}{a},$$
$$e^2 = 2f - f^2,$$

$$x = \rho \cos \varphi' \quad = (aC + h) \cos \varphi,$$
$$z = \rho \sin \varphi' \quad = (aS + h) \sin \varphi,$$
kde
$$C = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi}},$$
$$S = (1-f)^2 C.$$

<u>Geografické $(\varphi, h) \to$ geocentrické (φ', ρ) souřadnice:</u>

Pro $h = 0$:
$$\tan \varphi' = (b/a)^2 \tan \varphi.$$

Pro $h \neq 0$:
$$\tan u = (b/a) \tan \varphi,$$
$$s = \frac{b \sin u + h \sin \varphi}{a},$$
$$c = \cos u + \frac{h \cos \varphi}{a},$$
$$\tan \varphi' = \frac{s}{c} \quad = \frac{b \sin u + h \sin \varphi}{a \cos u + h \cos \varphi},$$
$$\rho = a\sqrt{s^2 + c^2}.$$

<u>Geocentrické $(\varphi', \rho) \to$ geografické (φ, h) souřadnice:</u>

Z ρ a φ' spočteme x, z,
φ počítáme iterační metodou:

$$\varphi_1 = \arctan(z/x),$$
$$\varphi_{n+1} = \arctan\left(\frac{z + aCe^2 \sin\varphi_n}{x}\right),$$
kde
$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi_n}}.$$

Proces opakujeme, dokud se hodnoty φ_{n+1} a φ_n od sebe neliší méně, než je požadovaná přesnost.
Pak

$$h = \frac{x}{\cos\varphi} - aC.$$

Reference

[1] Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN, Praha, 1988

[2] Astronomy on the Personal Computer, O. Montenbruck, T. Pfleger, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989

[3] Základy nebeské mechaniky, P. Andrle, Academia, Praha, 1971

[4] Malá encyklopedie kosmonautiky, P. Lála, A. Vítek, Mladá fronta, Praha, 1982

[5] Základy astronomie a astrofyziky, V. Vanýsek, Academia, Praha, 1980

[6] Astronomická příručka, M. Wolf a kol., Academia, Praha, 1992

[7] Astronomické algoritmy pro kalkulátory, Zdeněk Pokorný, Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy

[8] The Astronomical Almanac for the Year 1995, US Naval Observatory, Royal Greenwich Observatory, 1994

[9] Astronomical algorithms, Jean Meeus, Willmann-Bell, Inc., Richmond, 1991